定义 **1**　P 称为最简单图形, 如果 P 是有限个矩形的并. 而这样的矩形称为标准矩形.

若用 $\mu(P)$ 表示最简单图形 P 的面积, 则很自然地我们要求其有如下性质:

1. 对应每个有面积的图形 P, $\mu(P)$ 是非负的且单值确定的.
2. 边长为 1 的正方形的面积等于 1.
3. $\mu(P)$ 是可加的, 即若 $P = P_1 \cup P_2, P_1 \cap P_2 = \emptyset$, 则 $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$.
4. $\mu(P)$ 是关于平面的任何运动都不变的. 即如果 P_1,P_2 可以借助绕某一点旋转, 或通过平移, 而彼此重合, 那么 $\mu(P_1) = \mu(P_2)$.
5. $\mu(P)$ 是单调的, 若 $P_1 \subset P_2$ 则 $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$.

标准矩形可以不含于它的边上的任何一个点的子集. 每个标准矩形都有面积, 等于它相临两边的乘积. 对于一般的平面有界图形 P, 称一切包含 P 的简单图形 P_1 的面积 $\mu(P_1)$ 的下确界为 P 的 Jordan 测度外测度, 记为 $\mu^*(P)$. 对应的称一切包含在 P 内的简单图形 P_2 的面积 $\mu(P_2)$ 的下确界为 P 的 Jordan 测度内测度, 记为 $\mu_*(P)$.

定义 **2**　$\mu(P) = \mu^*(P)$ 为图形 P 的 Jordan 测度, 如果 $\mu^*(P) = \mu_*(P)$.

我们来验证对于平面上的可测图形定义的非负函数 $\mu(P)$, 具有那些最简单的图形所具有的单调性, 关于平面运动的不变性, 以及可加性.

首先我们证明, 可测图形的集合关于集合论的运算: 集合的并、交、差, 是封闭的. 即, 若图形 P_1 和 P_2 皆可测, 则图形 $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \backslash P_2$ 皆若尔当可测.

先证明两个集合的并的可测性. 根据集合若尔当可测的准则, 只需证明 $\mu(\partial(P_1 \cup P_2)) = 0$. 我们证明

$$\partial(P_1 \cup P_2) \subset \partial P_1 \cup P_2.$$

任取 $x \in \partial(P_1 \cup P_2)$. 假设 $x \notin P_1$,$x \notin P_2$. 那么点 x 或是 P_1 的内点, 或是 P_2 的内点, 或者既是 P_1 的外点又是 P_2 的外点. 由此推出, 点 x 相对于集合 $P_1 \cup P_2$ 而言, 或是内点, 或是外点, 而这与点 x 属于集合 $P_1 \cup P_2$ 的边界相矛盾. 一次, 两集合之并的边界是这两个集合的边界之并的子集合.

把可测集 P_1 和 P_2 放在一个标准正方形 K 之中, 那么集合 $K\backslash P_1$ 和 $K\backslash P_2$ 都是若尔当可测的, 因为它们的边界包含在集合 K,P_1,P_2 的边界的并集之中. 由此推出集合

$$P_1 \cup P_2, \quad P_1 \cap P_2 = k\backslash[(K\backslash P_1) \cup (K\backslash P_2)]$$

都是可测集.

现考察函数 $\mu(P)$ 的单调性. 若 $P_1 \subset P_2$, 则任何包含集合 P_2 的最简单图形也都包含 P_1, 因此 $\mu^*(P_1) \leq \mu^*(P_2)$. 但因图形 P_1 和 P_2 都可测, 所以

$$\mu(P_1) = \mu^*(P_1) \leq \mu^*(P_2) = \mu(P_2).$$

这表明, 函数 $\mu(P)$ 是单调的.

若尔当测度的平移不变性从最简单图形在平移之下面积不变, 从而在平移之下量 $\mu^*(P)$ 和 $\mu_*(P)$ 不变这一事实推出.

进而, 根据沙勒 (chasles) 定理, 平面的任何运动都归结为对称, 平移, 以及绕一固定点的旋转. 所以, 为了完成若尔当侧度关于平面运动的不变性的证明, 只需证明它关于平面绕一定点旋转的不变性. 我们觉察到, 在平面的旋转之下, 最简单的图形的面积不变, 然而它已不再是最简单的图形了.

于是, 设给定若尔当可测图形 P. 那么存在最简单的图形 P_1,P_2 使得 $P_1 \subset P \subset P_2$, 且

$$\mu(P_1) \le \mu(P) < \mu(P_1) + \varepsilon, \quad \mu(P_2) - \varepsilon < \mu(P) \le \mu(P_2),$$

而 P_1 和 P_2 皆可表示成有限个标准矩形的并集, 在平面绕某不动点的旋转之下, 图形 P,P_1,P_2 分别变成可测图形 Q,Q_1,Q_2, 且 $Q_1 \subset Q \subset Q_2$. 显然, 只需要证明如果标准矩形在旋转之下变成了矩形 H, 那么可将它含在一个开的最简单的图形 H_1 中且让它包含一个闭的最简单图形 H_1, 使得 $H_2 \subset H \subset H_1$ 且差 $\mu(H_1) - \mu(H_2)$ 可以做到任意小. 为此我们把矩形 H 框在一个矩形 H_0 中, H_0 的边分别与 H 平行且相距甚小. 然后在 H_0 内作最简单的图形, 使之包含 H. 它就是要找的 H_1. 类似地构作图形 H_2.

现证若尔当测度的加性. 我们首先看到, 对于最简单的图形成立不等式

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B).$$

其次, 设图形 P_1 和 P_2 是若尔当可测的且设 $P = P_1 \cup P_2$,$P_1 \cap P_2 = \emptyset$. 那么, 根据集合的可测准则, 图形 P 是可测的, 因为两个集合的并集的边界包含在它们边界的并集之中. 我们来证明成立等式

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

根据图形 P_1 和 P_2 的可测性, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在最简单的图形 Q_1,Q_2,R_1,R_2, 使得 $Q_1 \subset P_1 \subset Q_2$, $R_1 \subset P_2 \subset R_2$ 且

$$\mu(Q_1) \le \mu(P_1) < \mu(Q_1) + \varepsilon, \quad \mu(Q_2) - \varepsilon < \mu(P_1) \le \mu(Q_2),$$

$$\mu(R_1) \le \mu(P_2) < \mu(R_1) + \varepsilon, \quad \mu(R_2) - \varepsilon < \mu(P_2) \le \mu(R_2).$$

此外, 对于满足条件 $Q_1 \cup R_1 = \emptyset$ 的最简单图形 Q_1 和 R_1 , 我们有 $\mu(Q_1 \cup R_1) = \mu(Q_1) + \mu(R_1)$, 且同样, $\mu(Q_2 \cup R_2) \le \mu(Q_2) + \mu(R_2)$. 因此, 考虑到集合论的包含关系

$$(Q_1 \cup R_1) \subset (P_1 \cup P_2) = P \subset (Q_2 \cup R_2)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mu(Q_1) + \mu(R_1) = \mu(Q_1 \cup R_1) \le \mu(P) \le \mu(Q_2 \cup R_2) \\ \le \mu(Q_2) + \mu(R_2) < \mu(Q_1) + \mu(R_1) + 4\varepsilon.\end{aligned}$$

同样显然有

$$\mu(Q_1) + \mu(R_1) \leq \mu(p_1) + \mu(P_2) < \mu(P_1) + \mu(R_1) + 2\varepsilon.$$

由此求得

$$|\mu(P) - \mu(P_1) - \mu(p_2)| + \mu(P_2) < 4\varepsilon.$$

而根据 ε 的选取的任意性, 有

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(p_2).$$

这就证明了若尔当测度的可加性.